Keine Ahnung von arithmethischen Reihen

Was sind

Arithmetische Reihen

?

Datei Nr. 40051

Stand 7. Mai 2020

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text ist eine kurze Einführung ist die wichtigsten Fakten zu arithmetischen Reihen.
Er ist zur Wiederholung gedacht. Eine gründliche Einführung mit vielen Übungsaufgaben und Musterlösungen findet man im Text 40040.

Wer eine Wiederholung zum Thema arithmetische Folgen braucht, die hier vorausgesetzt werden, kann im Text 40015 (Keine Ahnung von arithmetischen Folgen) oder im Text 40012 (gründliche Einführung) nachlesen.

Inhalt

1	Eine Reihe ist …	3
2	Formen von Aufgaben	4
	10 verschiedene Fragestellungen und Lösungswege.	

1 Eine Reihe ist …

eine Zahlenfolge, deren Glieder die Teilsummen einer Folge sind.

1. Beispiel: Gegeben sei die arithmetische Folge $a_n = 4n+1$, also $\{5\ ;\ 9\ ;\ 13\ ;\ 17\ ;\ 21\ ;...\}$.

Daraus bilden wir eine ***Folge von Teilsummen*** (eine Teilsumme beginnt immer bei a_1).

1. Teilsumme: $s_1 = a_1$ mit Zahlen: $s_1 = 5$

2. Teilsumme: $s_2 = a_1 + a_2$ $s_2 = 5+9 = 14$

3. Teilsumme: $s_3 = \underbrace{a_1 + a_2}_{s_2} + a_3$ $s_3 = \underbrace{5+9}_{14} + 13 = 27$

4. Teilsumme: $s_4 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{s_3} + a_4$ $s_4 = \underbrace{5+9+13}_{27} + 17 = 44$

5. Teilsumme: $s_5 = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}_{s_4} + a_5$ $s_5 = \underbrace{5+9+13+17}_{44} + 21 = 65$

…..

n-te Teilsumme: $s_n = \underbrace{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}_{s_{n-1}} + a_n$ $s_n = 5+6+...+(4n+1) = \boxed{2n^2+3n}$

Doch wie habe ich es geschafft, diese Summe s_n zu berechnen? Das zeige ich gleich.

Merke:

(1) Eine Reihe ist eine Folge von Teilsummen

$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ **oder** $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

(2) Jede Reihe kann rekursiv so berechnet werden:

$s_n = s_{n-1} + a_n$ **oder** $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$

(3) Die explizite Summenformel für die arithmetische Reihe lautet: $\boxed{s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)}$

Jede arithmetische Folge hat eine explizite Funktionsgleichung, die man in der Form

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$ schreiben kann.

Setzt man diese in die Summenformel ein, folgt:

$$s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_1 + (n-1)\cdot d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\cdot d) = n\cdot a_1 + \tfrac{1}{2}n(n-1)\cdot d$$

$$s_n = n\cdot a_1 + \tfrac{1}{2}n^2\cdot d - \tfrac{1}{2}n\cdot d = \underbrace{\tfrac{1}{2}d}_{A}\cdot n^2 + \underbrace{\left(a_1 - \tfrac{1}{2}d\right)}_{B}\cdot n$$

Wir haben damit gezeigt, dass die Summenformel einer arithmetischen Reihe nach Einsetzen von a_1 und a_n einen quadratischen Term der Form $s_n = A\cdot n^2 + B\cdot n$ ergibt.

2 Formen von Aufgaben

1 Gegeben ist die arithmetische Folge $\boxed{a_n = 3n + 4}$.

a) Berechne die ersten 5 Glieder dieser Folge und die zugehörigen 5 Teilsummen.

b) Wie lautet die Formel für die Teilsummen dieser Folge (s_n = …) ?

c) Berechne die Partialsumme s_{100}.

Lösung:

a) Die arithmetische Folge lautet $a_n = 3n + 4$. Die konstante Differenz ist also d = 3.

Folge:			Teilsummen (rekursiv berechnet)
$a_1 = 3 \cdot 1 + 4 = 7$			$s_1 = a_1 = 7$
$a_2 = 2 \cdot 3 + 4 = 10$	oder	$a_2 = 7 + 3 = 10$	$s_2 = s_1 + a_2 = 7 + 10 = 17$
$a_3 = 3 \cdot 3 + 4 = 13$	oder	$a_3 = 10 + 3 = 13$	$s_3 = s_2 + a_3 = 17 + 13 = 30$
$a_4 = 4 \cdot 3 + 4 = 16$	oder	$a_4 = 13 + 3 = 16$	$s_4 = s_3 + a_4 = 30 + 16 = 46$
$a_5 = 3 \cdot 5 + 4 = 19$	oder	$a_5 = 16 + 3 = 19$	$s_5 = s_4 + a_5 = 46 + 19 = 65$

b) Formel für die Teilsummen:

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)} = \frac{n}{2} \cdot (7 + 3n + 4) = \frac{n}{2} \cdot (3n + 11) = \boxed{\frac{3}{2} n^2 + \frac{11}{2} \cdot n}$$

c) $$s_{100} = \frac{3}{2} \cdot 100^2 + \frac{11}{2} \cdot 100 = \frac{30000 + 1100}{2} = \frac{31100}{2} = 15550$$

2 Gegeben ist $\boxed{a_n = 100 - 7n}$. Berechne s_{10} und stelle die Formel für s_n auf.

Lösung: Man muss erkennen, dass d = - 7 ist und berechnet dann

$$a_1 = 100 - 7 \cdot 1 = 93 \text{ sowie } a_{10} = 100 - 7 \cdot 10 = 30$$

Damit folgt: $s_{10} = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_{10}) = 5 \cdot (93 + 30) = 5 \cdot 123 = 615$

Allgemein: $s_n = \frac{n}{2} \cdot (93 + 100 - 7n) = \frac{n}{2}(193 - 7n) = -\frac{7}{2} n^2 + \frac{193}{2} n$

3 Berechne die Summe $\boxed{17 + 18 + \ldots + 63}$

Lösung: Die konstante Differenz d = 1 zeigt, daß eine arithmetische Reihe vorliegt.

Wir müssen zuerst herausfinden, wieviele Glieder addiert werden sollen. Hier hilft das <u>Lattenzaunprinzip</u>. Zwischen 4 Latten befinden sich 3 Zwischenräume:

Hier tragen die „Latten" die Nummern 17 bis 63, also liegen 63 – 17 = 46 Zwischenräume vor, d.h. der „Lattenzaun besteht aus 47 Latten", d.h. Unsere Summe besteht aus n = 47 Zahlen:

$$s_{47} = 17 + 18 + \ldots + 63 = \frac{47}{2}(17 + 63) = \frac{47}{2} \cdot 80 = 47 \cdot 40 = 1880$$

4 Berechne die Summe $38+40+42+...+124$

Lösung:

Aus den ersten drei Gliedern kann man vermuten, dass eine arithmetische Folge mit d = 2 zugrunde liegt. Wie viele Summanden gibt es?

Aufstellen des expliziten Terms: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Hier also: $a_n = 38 + (n-1) \cdot 2 = 38 + 2n - 2 = 36 + 2n$

Einsetzen von $a_n = 124$: $124 = 36 + 2n$

Daraus folgt: $2n = 124 - 36 = 88$

Also erhält man: $n = 44$.

Folgerung: $s_{44} = \frac{44}{2} \cdot (38 + 124) = 22 \cdot 162 = 3564$.

5 Berechne $1045 + 1015 + 985 + \ldots + 295$.

Lösung:

Es ist günstiger, die Folge der Größe nach umordnen. s_n beginnt dann mit $a_1 = 295$.
Dann ist $a_n = 1045$.
Man erkennt aus ersten drei Summanden, dass d = 30 ist.

Aufstellen des expliziten Terms: $a_n = 295 + (n-1) \cdot 30 = 295 + 30n - 30 = 265 + 30n$

Einsetzen von $a_n = 1045$: $1045 = 265 + 30n$

$30n = 780 \Rightarrow n = 26$

Man erhält damit: $s_{26} = \frac{26}{2} \cdot (295 + 1045) = 13 \cdot 1340 = 17420$

6 Berechne die Summe der ersten 20 Glieder dieser arithmetischen Folge:

$a_1 = 215$; $a_2 = 205$; $a_3 = 195$; ...

Lösung:

Man muss zuerst a_{20} berechnen: $d = a_2 - a_1 = -10$ (!)

und folglich $a_{20} = 215 + 19 \cdot (-10) = 215 - 190 = 25$

Damit erhält man $s_{20} = \frac{20}{2}(215 + 25) = 10 \cdot 240 = 2400$

7 Bei einer arithmetischen Folge ist $a_4 = 64$ und $a_9 = 99$. Berechne s_{25}.

Lösung:

Zuerst d berechnen: $a_9 - a_4 = 5d = 99 - 64 = 35 \Rightarrow d = 7$

Also ist: $a_1 = a_4 - 3d = 64 - 21 = 43$

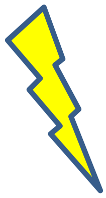
und: $a_{25} = a_1 + 24 \cdot d = 43 + 24 \cdot 7 = 211$

Daher erhält man: $s_{25} = \frac{25}{2}(43 + 211) = \frac{25}{2} \cdot 254 = 25 \cdot 127 = 3175$

8 Für welches x ist $15+20+15+...+x=750$?

Lösung:

Ich berechne die Summe der linken Seite mit der Summenformel:



Mit d = 5 folgt: $s_n = \frac{n}{2}(15+x) = 750$ (1)

Andererseits ist $x = a_n = 15+(n-1)\cdot 5$ (2)

Setzt man (2) in (1) ein, erhält man: $\frac{n}{2}(15+\boxed{15+(n-1)\cdot 5} = 750$

bzw. $n(30+5n-5) = 1500$.

Daraus folgt $5n^2 + 25n - 1500 = 0 \quad |:5$

$n^2 + 5n - 300 = 0$

mit $n_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+1200}}{2} = \frac{-5 \pm 35}{2} = \begin{cases} 15 \\ (-20) \end{cases}$

Also ist $x = a_{15} = 15 + 14 \cdot 5 = 85$.

9 Eine arithmetische Reihe hat $s_3 = 33$ und $s_5 = 75$. Berechne a_n.

Schwer!

Lösung:

Zuerst muss man sich klar machen, wie die Teilsummen mit der Folge zusammenhängen.

Aus $s_3 = \frac{3}{2}(a_1 + a_3) = 33$ folgt $a_1 + a_3 = \frac{2}{3}\cdot 33 = 22$ (1)

und aus $s_5 = \frac{5}{2}(a_1 + a_5) = 75$: $a_1 + a_5 = \frac{2}{5}\cdot 75 = 30$ (2)

(1) und (2) sind 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten: a_1, a_3 und a_5. Das klappt so nicht.

Jetzt kommt ein einfacher Trick: Da eine arithmetische Folge vorliegt, kann man a_3 und a_5 ersetzen durch: $a_3 = a_1 + 2\cdot d$

und $a_5 = a_1 + 4\cdot d$

Damit folgt aus (1): $a_1 + \overbrace{a_1 + 2d}^{a_3} = 22 \Leftrightarrow 2a_1 + 2d = 22 \Leftrightarrow \boxed{a_1 + d = 11}$ (3)

Und aus (2): $a_1 + \underbrace{a_1 + 4d}_{a_5} = 30 \Leftrightarrow 2a_1 + 4d = 30 \Leftrightarrow \boxed{a_1 + 2d = 15}$ (4)

Jetzt liegen uns 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten vor, die man durch Elimination löst:

Subtraktion: (4) – (3) : d = 4

In (3) ergibt $a_1 = 7$.

Daher folgt $a_1 = a_1 + (n-1)\cdot d$

also $a_n = 7 + (n-1)\cdot 4$

$a_n = 4n + 3$

10 Eine Folge hat die Teilsumme $s_n = 7n^2 - 5n$. Wie lautet a_n?

Lösung:

Methode: Man berechnet s_1 und s_2 und daraus a_1, a_2 und d.

$s_1 = 7 - 5 = 2$	d. h.	$a_1 = 2$	(1)
$s_2 = 28 - 10 = 18$	d. h.	$a_1 + a_2 = 18$	(2)
(2) – (1):		$a_2 = 16$	
Also wird:		$d = a_2 - a_1 = 14.$	
Schließlich folgt:		$a_1 = a_1 + (n-1) \cdot d$	
Also		$a_n = 2 + (n-1) \cdot 14$	
		$a_n = 14n - 12$	